

Моделирование финансовых рисков

А.А.Новоселов*

Старые лекции для студентов математического факультета КГУ (1998 год)

Содержание

1	Неопределенность и риск	2
1.1	Неопределенность	2
1.2	Риск	3
1.3	Портфель рисков	3
1.4	Страхование	3
2	Страховые портфели	3
2.1	Простейший страховой портфель	3
2.2	Простой страховой портфель	4
2.3	Реальный страховой портфель	4
3	Цена страхования	5
3.1	Принципы определения цены	5
3.1.1	Принцип безрискованности	5
3.1.2	Принцип справедливости	6
3.1.3	Принцип достаточного покрытия	6
3.2	Неоднородность портфеля	7
4	Введение в теорию полезности	8
4.1	Риск	8
4.2	Предпочтения	10
4.2.1	Отношение предпочтения	10
4.3	Теорема о существовании функции полезности	11
4.3.1	Система аксиом	11
4.3.2	Теорема существования	11
4.4	Решения	14

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Академгородок, e-mail: anov@icm.krasn.ru, т. (3912) 495382

5	Характеризация отношения к риску	15
5.1	Отношение к риску	15
5.1.1	Нейтралитет	15
5.1.2	Склонность к риску	15
5.1.3	Неприятие риска	16
5.2	Количественное выражение неприятия риска	17
5.2.1	Цена риска	17
5.2.2	Неприятие риска	17
5.2.3	Теорема Пратта	17
6	Простейший процесс риска	19
6.1	Описание процесса	19
6.2	Уравнение для вероятности разорения	20
6.3	Вычисление вероятностей разорения	20
6.4	Игра с бесконечно богатым противником	21
7	Классический процесс риска	21
7.1	Определение	21
7.2	Разорение процесса	23
7.3	Зависимость вероятности разорения процесса от параметров	23
8	Агрегированный процесс риска	24
8.1	Операция агрегирования	24
8.2	Разорение	25
8.3	Случайное блуждание	25
8.4	Уравнение для вероятности разорения	26
8.5	Пример: простейший процесс риска	27
9	Время жизни процессов риска	27
9.1	Простейший процесс риска	27
9.2	Игра в кошки – мышки	29

1 Неопределенность и риск

1.1 Неопределенность

Окружающий мир полон неопределенностей, связанных с невозможностью точного предсказания будущих событий. Ошибаясь в прогнозах, мы рискуем получить не совсем то, или совсем не то, что ожидалось. Вездесущая неопределенность является источником **риска**.

Математические модели, описывающие неопределенность, можно разделить на две группы:

- вероятностные модели;
- модели нечетких множеств.

В настоящем курсе мы будем использовать только первый способ описания.

1.2 Риск

Часто нас интересует не столько исход того или иного процесса, сколько связанные с ним количественные характеристики. При этом риск может быть описан **случайной величиной**, или, в общем случае **абстрактным случайным элементом**. Совокупность всех рисков будем обозначать \mathcal{X} , и на начальном этапе ограничимся следующим определением.

Определение 1.1 *Риском называется произвольная случайная величина.*

1.3 Портфель рисков

Совокупность рисков, рассматриваемых совместно, часто обладает новыми свойствами, не присущими каждому из рисков в отдельности, поэтому введем понятие **портфеля** рисков \mathcal{P} , как произвольного подмножества \mathcal{X} .

1.4 Страхование

Под страхованием понимается передача риска от одного носителя (страхователя) другому (специализированной организации – страховой компании, страховщику) за определенную плату, называемую ценой страхования, тарифной ставкой или **страховой премией**. Сущность страхования заключается в перераспределении риска между многими носителями; относительно однородную совокупность рисков будем называть страховым портфелем.

2 Страховые портфели

Рассмотрим некоторые виды страховых портфелей, используемые в дальнейшем.

2.1 Простейший страховой портфель

Простейший страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\} \tag{1}$$

состоит из N рисков (случайных величин) X_1, \dots, X_N , являющихся независимыми и одинаково распределенными; X_1 имеет бернуллиевское распределение

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p. \end{cases} \tag{2}$$

Содержательно для каждого риска страховое событие может наступить с вероятностью p , а убыток в результате наступления этого страхового события равен 1 (и одинаков для всех рисков).

Ясно, что риск портфеля

$$X = \sum_{i=1}^N X_i \tag{3}$$

имеет биномиальное распределение с параметрами N, p :

$$\mathbf{P}\{X = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{(N-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

Основные параметры этого распределения равны

$$\mathbf{E}X = Np; \quad \mathbf{D}X = Np(1-p). \quad (5)$$

2.2 Простой страховой портфель

Простой страховой портфель

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\} \quad (6)$$

также состоит из N независимых рисков X_1, \dots, X_N , однако их распределения несколько различаются:

$$X_i = \begin{cases} S_i & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p. \end{cases} \quad (7)$$

Содержательно для i -го риска страховое событие наступает с вероятностью p , а размер убытка в результате наступления этого события равен S_i и, вообще говоря, неодинаков у различных рисков. Примером может служить страхование на случай смерти с величиной S_i , определяемой страховой суммой i -го договора портфеля.

Распределение риска портфеля (3) в данном случае уже не имеет столь простого выражения, как (4), но его основные параметры все еще легко вычисляются:

$$\mathbf{E}X = Np\bar{S}_N; \quad \mathbf{D}X = Np(1-p)\widehat{S}_N^2, \quad (8)$$

где

$$\bar{S}_N = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i; \quad \widehat{S}_N^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (9)$$

2.3 Реальный страховой портфель

Реальный страховой портфель является дальнейшим усложнением простого портфеля; здесь допускаются произвольные размеры убытков из диапазона $[0, S_i]$. Формальное описание этого портфеля таково: он состоит из N независимых рисков

$$\mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_N\}, \quad (10)$$

вероятность наступления страхового события по i -му риску по-прежнему равна p , а размер убытка, вызванного страховым событием описывается случайной величиной

$$X_i = \xi_i r_i S_i,$$

где

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1-p \end{cases}$$

есть индикатор наступления страхового события по i -му риску, S_i – страховая сумма (ответственность) по i -му риску, а r_1, \dots, r_N – совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_r(v) = \mathbf{P}\{r_1 \leq v\}$.

Здесь распределение риска портфеля также не имеет простого явного выражения, но по известным параметрам распределения r_1

$$m = \mathbf{E}r_1, \quad \tau^2 = \mathbf{D}r_1 \quad (11)$$

нетрудно подсчитать основные параметры риска портфеля (3):

$$\mathbf{E}X = pmN\bar{S}_N, \quad \mathbf{D}X = pm^2N\hat{S}_N[1 - p + \tau^2/m^2]. \quad (12)$$

Упражнение 2.1 Вывести формулы (5), (8), (12) для параметров рассмотренных портфелей.

3 Цена страхования

Одной из основных задач теории риска является определение цены, которую следует уплатить при передаче риска от одного носителя к другому. В страховании принято выражать страховую премию в долях от страховой суммы (ответственности) S_i соответствующего риска. Таким образом, при размере премии T (одинаковом для всех рисков портфеля) абсолютный размер премии i -го риска оказывается равным TS_i , а суммарная премия портфеля –

$$Q = TN\bar{S}_N. \quad (13)$$

Попытаемся сначала сформулировать некоторые естественные принципы определения цены, и рассмотрим их действие на примере простейшего страхового портфеля.

3.1 Принципы определения цены

3.1.1 Принцип безрискованности

В качестве первого принципа попытаемся назначить цену так, чтобы деятельность страховой компании была безрискованной, то есть, чтобы собранных премий (13) с вероятностью 1 хватало для покрытия всех страховых убытков портфеля. В случае простейшего портфеля максимальный размер убытка портфеля равен N , а вероятность его появления: $p^N > 0$, так что для выполнения этого требования необходимо обеспечить равенство $Q = TN = N$, откуда $T = 1$, т.е. абсолютный размер премии совпадает с ответственностью по риску. Ясно, что такое страхование является совершенно непривлекательным для страхователей, и его рассмотрение лишено смысла. Нетрудно проверить, что данный вывод справедлив и для более сложных портфелей рисков (см. упражнение 3.1). Отсюда следует вывод:

Безрискованное ведение страхового бизнеса невозможно,

и, в частности, страховая премия должна удовлетворять неравенству $T < 1$.

3.1.2 Принцип справедливости

Попытаемся теперь обеспечить "справедливость" процесса передачи рисков, т.е. эквивалентность финансовых обязательств партнеров. Поскольку размер страховой премии (финансового обязательства страхователя) детерминирован, а размер обязательства страховщика (возмещаемого страхового убытка) случаен, будем понимать равенство этих обязательств в среднем по портфелю: $TN = \mathbf{E}X$, откуда, с учетом (5), $T = p$. Как мы увидим далее при рассмотрении процессов риска, такой размер премии является слишком малым, поскольку при многократном воспроизведении такого страхового портфеля с вероятностью 1 происходит разорение страховой компании. Здесь проиллюстрируем этот эффект следующими соображениями. Зададимся вопросом: каков будет размер прибыли страховщика после m – кратного воспроизведения портфеля, сформированного по справедливому принципу. Прибыль j -го портфеля представляет собой случайную величину $Z^{(j)} = Q - X^{(j)}$ с $\mathbf{E}Z^{(j)} = 0$ и $\mathbf{D}Z^{(j)} = \sigma^2 > 0$. Поэтому искомая прибыль есть

$$Z_m = \sum_{j=1}^m Z^{(j)},$$

причем $\mathbf{E}Z_m = 0$ и (в случае независимости портфелей) $\mathbf{D}Z_m = m\sigma^2$, т.е. прибыль m портфелей в среднем равна 0, но неопределенность в ее значении возрастает с ростом m , в частности, может достигнуть сколь угодно малого значения, приводя к разорению компании.

Таким образом, премия должна удовлетворять неравенству $T > p$. Для более сложных портфелей (см. упражнение 3.2) вывод звучит следующим образом: премия должна превосходить размер среднего относительного убытка портфеля $\mathbf{E}(X/R)$, где $R = \sum S_i$ – суммарная ответственность по портфелю.

3.1.3 Принцип достаточного покрытия

В предыдущих пунктах мы убедились в том, что первые два принципа исчисления премии неработоспособны, и следует искать другие принципы, приводящие к значениям $T \in (p, 1)$ (для простейшего портфеля). Здесь рассмотрим принцип достаточного покрытия, сущность которого заключается в следующем: поскольку единичную вероятность покрытия будущих убытков портфеля X премиями Q обеспечить не удастся, попытаемся обеспечить заданное значение этой вероятности: зафиксируем число $\alpha \in (0, 1)$ и будем определять премию T из уравнения

$$\mathbf{P}\{X \leq Q\} = \alpha. \quad (14)$$

Пусть F – функция распределения риска портфеля: $F(x) = \mathbf{P}\{X \leq x\}$, F_0 – функция распределения соответствующей центрированной и нормированной случайной величины $(X - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}$. Тогда уравнение (14) приводится к виду

$$F_0((Q - \mathbf{E}X)/\sqrt{\mathbf{D}X}) = \alpha, \quad (15)$$

откуда, с учетом (13), (5), получаем

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right). \quad (16)$$

В случае большого объема портфеля N ссылка на центральную предельную теорему позволяет переписать (16) в виде

$$T = p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \Phi^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \sqrt{\frac{1-p}{pN}} \Phi^{-1}(\alpha) \right), \quad (17)$$

где Φ – функция стандартного нормального распределения.

Из (15) с использованием (8), (12), аналогично получаем выражения страховой премии для простого

$$T = p + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} F_0^{-1}(\alpha) = p \left(1 + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{1-p}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right) \quad (18)$$

и реального

$$T = pm \left(1 + \frac{\hat{S}_N}{\bar{S}_N} \sqrt{\frac{1-p + \tau^2/m^2}{pN}} F_0^{-1}(\alpha) \right) \quad (19)$$

портфелей, соответственно. Здесь функция распределения F_0 также может быть при большом объеме портфеля заменена на функцию стандартного нормального распределения.

Отметим, что именно формула (19), полученная нами здесь с использованием исключительно элементарных средств, рекомендована российским страховщикам нормативными документами [1] для расчетов страховой премии по всем видам страхования, отличным от страхования жизни (причем с заменой множителя \hat{S}_N/\bar{S}_N на произвольно выбранную постоянную 1.2). Вся излагаемая дальше теория еще ждет своего применения в практике российского страхового рынка.

3.2 Неоднородность портфеля

Простейший страховой портфель является вполне однородным, а в простом и реальном допускаются различные величины страховых сумм S_i , что приводит к неоднородности этих портфелей. Указанная неоднородность количественно определяется коэффициентом

$$n_{\mathcal{P}} = \hat{S}_N / \bar{S}_N. \quad (20)$$

Изучим здесь его возможные значения.

Предложение 3.1 *Значения коэффициента неоднородности портфеля (20) лежат в интервале $[1, \sqrt{N}]$.*

Доказательство. Для удобства будем рассматривать значения $n_{\mathcal{P}}^2$ и покажем, что они лежат в $[1, N]$. Рассмотрим вспомогательную дискретную случайную величину ξ , принимающую значения S_1, \dots, S_N с вероятностями N^{-1} . Для нее, очевидно, справедливо

$$\mathbf{E}\xi = \bar{S}_N, \quad \mathbf{E}\xi^2 = \hat{S}_N^2,$$

так что

$$\mathbf{D}\xi = \hat{S}_N^2 - \bar{S}_N^2 \geq 0,$$

откуда $n_{\mathcal{P}}^2 \geq 1$. Для нахождения верхней границы диапазона значений $n_{\mathcal{P}}^2$ заметим, что максимизация $n_{\mathcal{P}}^2$ на неотрицательном ортанте \mathbf{R}^+ эквивалентна задаче оптимизации

$$f(S_1, \dots, S_N) = S_1^2 + \dots + S_N^2 \longrightarrow \max_{S_1, \dots, S_N}, \quad (21)$$

$$S_1 + \dots + S_N = 1, \quad (22)$$

$$S_1 \geq 0, \dots, S_N \geq 0, \quad (23)$$

и покажем, что ее экстремальными точками могут быть только единичные орты \mathbf{R}^N , т.е. векторы вида $S = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей на i -й позиции (для каждого такого вектора, очевидно, $f(S_1, \dots, S_N) = 1$). Действительно, пусть решением задачи (21) – (23) является точка $S^{(0)}$, некоторые координаты $S_j^{(0)}, S_k^{(0)}$ которой удовлетворяют неравенствам $0 < S_j^{(0)} \leq S_k^{(0)} < 1$. Ввиду симметрии задачи можно считать $j < k$. Тогда при достаточно малых δ точка $S^{(1)} = (\dots, S_j^{(0)} - \delta, \dots, S_k^{(0)} + \delta, \dots)$ является допустимой в этой задаче и

$$f(S^{(1)}) - f(S^{(0)}) = 2\delta(S_k^{(0)} - S_j^{(0)}) + 2\delta^2 > 0,$$

что противоречит экстремальности $S^{(0)}$. Значения же квадрата коэффициента неоднородности на единичных ортах равны, очевидно, N , что и требовалось. \diamond

Упражнение 3.1 Показать для простого и реального портфелей, что принцип безрискованности дает значение цены страхования $T = 1$.

Упражнение 3.2 Применить принцип эквивалентности к простому и реальному портфелям. Показать, что страховая премия должна превосходить размер средних относительных убытков портфеля.

Упражнение 3.3 Дать геометрическую интерпретацию доказательства предложения 3.1.

4 Введение в теорию полезности

4.1 Риск

Риск есть состояние *неопределенности*, неполной информации относительно каких – либо событий в будущем. Чаще других для математического описания неопределенности используются следующие два способа:

- вероятностное описание;
- нечеткие (размытые) множества.

Второй способ предназначен для описания неопределенностей, присущих высказываниям на человеческих (неформализованных) языках.

Мы будем рассматривать только первый способ и, таким образом, определим риск, как состояние *вероятностной неопределенности*: будущие события нельзя предсказать точно, однако известно их вероятностное распределение.

В простейших случаях множество будущих событий конечно и риск представляется вероятностным распределением на конечном пространстве элементарных событий.

Пример 4.1 В эксперименте с подбрасыванием монеты мы не можем точно предсказать исход этого эксперимента, однако множество всех возможных исходов конечно: $\Omega = \{g, p\}$ и известно вероятностное распределение на этом множестве: каждый из исходов может появиться с вероятностью $1/2$.

Часто нас интересуют не столько сами исходы эксперимента, сколько связанные с ними количественные значения; в этом случае риск описывается распределением некоторой случайной величины.

Пример 4.2 В условиях предыдущего примера монета может подбрасываться в процессе игры двух лиц, в которой первый игрок выигрывает или проигрывает единицу в зависимости от выпавшей стороны монеты. Здесь риск описывается дискретной случайной величиной, принимающей значения ± 1 с вероятностями $1/2$.

Пример 4.3 Доходность финансового вложения в фиксированную ценную бумагу не может быть точно предсказана заранее, однако всевозможные значения этой доходности могут быть описаны случайной величиной с распределением, полученным статистическими методами по данным о прошлом поведении доходности данной ценной бумаги.

В более сложных случаях риск может описываться распределением случайного вектора, или, вообще говоря, распределением произвольного абстрактного случайного элемента; приведем строгое определение.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – измеримое пространство, где $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$ – σ -алгебры событий на Ω, Θ , соответственно. Напомним, что случайным элементом Ξ на $(\Omega, \mathcal{F}_\Omega, \mathbf{P})$ со значениями в $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ называется измеримое (относительно пары σ -алгебр $\mathcal{F}_\Omega, \mathcal{F}_\Theta$) отображение $\Xi : \Omega \rightarrow \Theta$.

Определение 4.1 Риском называется произвольный случайный элемент.

Пример 4.4 Пусть $\Theta = \mathbf{R}$ – вещественная прямая, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевских множеств на \mathbf{R} , тогда риск есть случайная величина.

Пример 4.5 Пусть $\Theta = \mathbf{R}^n$ – n -мерное пространство, $\mathcal{F}_\Theta = \mathcal{B}$ – σ -алгебра его борелевских множеств, тогда риск есть случайный вектор.

Пример 4.6 Пусть \mathcal{X} – произвольное конечное множество, $\Theta = 2^{\mathcal{X}}$ – совокупность всех его подмножеств, \mathcal{F}_Θ – алгебра всех подмножеств Θ , тогда Ξ есть случайное конечное абстрактное множество.

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ будем трактовать, как окружающую среду, а измеримое пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ – как пространство результатов. Каждый случайный элемент Ξ порождает на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$ вероятностное распределение по правилу

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega : \Xi(\omega) \in T\} = \mathbf{P}\{\Xi^{-1}(T)\}, \quad T \in \mathcal{F}_\Theta, \quad (24)$$

превращая его тем самым в вероятностное пространство $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta, P)$. Будем обозначать \mathcal{P} совокупность всех таких вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$.

Упражнение 4.1 Приведите пример нечеткого высказывания.

Упражнение 4.2 Приведите другие примеры рисков.

Упражнение 4.3 Совпадает ли совокупность распределений \mathcal{P} с множеством всевозможных вероятностных распределений на $(\Theta, \mathcal{F}_\Theta)$?

4.2 Предпочтения

4.2.1 Отношение предпочтения

Определение 4.2 *Отношение \succeq на произвольном множестве Y называется отношением предпочтения, если оно*

p1) полно, т.е. $\forall x, y \in Y$ верно $x \succeq y$ или $y \succeq x$;

p2) транзитивно, т.е. $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$.

Пример 4.7 *Частным случаем отношения предпочтения является отношение полного упорядочения \geq , удовлетворяющее аксиомам*

o1) $\forall x, y \in Y$ верно $x \geq y$ или $y \geq x$ (полнота);

o2) $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (транзитивность);

o3) $x \geq y, y \geq x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность).

Видно, что, в отличие от отношения порядка, отношение предпочтения не обладает, вообще говоря, свойством антисимметричности, т.е. из $x \succeq y$ и $y \succeq x$ не вытекает равенство x и y . Будем в этом случае называть x, y одинаково предпочтительными или эквивалентными и использовать для обозначения этого факта символ \sim :

$$x \succeq y, y \succeq x \implies x \sim y.$$

Замечание 4.1 *Отметим здесь следующий факт: отношение "одинаковой предпочтительности" является в строгом смысле отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности $x \sim x, \forall x \in Y$, транзитивности $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ и симметричности $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, причем порожденное им фактор-множество $\mathcal{Y} = Y / \sim$ является вполне упорядоченным множеством с отношением порядка \succeq , индуцированным отношением предпочтения \succeq на Y : для $Y_1, Y_2 \in \mathcal{Y}$ отношение $Y_1 \succeq Y_2$ означает, что для некоторых ($и, тем самым, для произвольных$) $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2$ выполняется $y_1 \succeq y_2$.*

Если же x предпочтительнее y , а обратное неверно, то будем использовать символ строгого предпочтения \succ :

$$x \succeq y, y \not\succeq x \implies x \succ y.$$

Разумный индивидуум имеет четкое представление о системе своих предпочтений на пространстве результатов Θ : для произвольной пары $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ он может вполне определенно сказать, какой из этих элементов является для него более предпочтительным, или же эти элементы эквивалентны. Если результаты (элементы Θ) трактуются, как доходности, то Θ является подмножеством вещественной оси и отношение предпочтения можно задавать с помощью обычного отношения порядка на множестве вещественных чисел.

В теории полезности делается более сильное предположение: индивидуум имеет систему предпочтений и на пространстве распределений \mathcal{P} , т.е. для каждой пары распределений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ может определенно указать более предпочтительное для него распределение или утверждать их эквивалентность. Таким образом, на \mathcal{P} постулируется существование *отношения предпочтения* \succeq . Замечательнейшим фактом теории полезности является существование (при некоторых вполне естественных предположениях) *функции полезности*, адекватно описывающей это отношение предпочтения.

Упражнение 4.4 Верно ли $\forall x \in Y : x \succeq x$?

Упражнение 4.5 Показать, что отношение \succeq , введенное на \mathcal{Y} в замечании 4.1, действительно является отношением порядка на \mathcal{Y} .

4.3 Теорема о существовании функции полезности

4.3.1 Система аксиом

Введем на \mathcal{P} операцию смеси распределений: для произвольных $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ и числа $\alpha \in [0, 1]$ смесью \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 назовем распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$, задаваемое соотношением

$$\mathbf{P}(C) = \alpha \mathbf{P}_1(C) + (1 - \alpha) \mathbf{P}_2(C), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Будем предполагать выполненной следующую систему аксиом.

A1) На \mathcal{P} существует отношение предпочтения \succeq .

A2) Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} : \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P} \sim \alpha \mathbf{P}_2 + (1 - \alpha) \mathbf{P}. \quad (25)$$

A3) Если $\mathbf{P}_1 \succ \mathbf{P}_2$, то

$$\forall \alpha \in (0, 1], \forall \mathbf{P} \in \mathcal{P} : \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P} \succ \alpha \mathbf{P}_2 + (1 - \alpha) \mathbf{P}. \quad (26)$$

A4) Если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3. \quad (27)$$

Приведенные аксиомы можно трактовать, как требования наличия у отношения предпочтения некоторой регулярности, "правильности".

4.3.2 Теорема существования

Прежде чем формулировать основную теорему, докажем несколько лемм.

Лемма 4.1 Пусть выполнены аксиомы A1–A4, $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$. Тогда существует единственная постоянная $\alpha \in [0, 1]$ такая, что

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3. \quad (28)$$

Доказательство. Заметим, что если $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$, то соотношение (28) выполняется при единственном значении $\alpha = 1$ (см. упражнение 4.6). Аналогично, если $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$, то (28) выполняется только при $\alpha = 0$ (см. упражнение 4.7).

Пусть теперь $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$. Тогда по аксиоме A4 существует $\alpha_1 \in (0, 1)$ такое, что выполнено

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \mathbf{P}_3. \quad (29)$$

Предположим, что такое α_1 неединственно, и существует $\alpha_2 \in (0, 1)$, для которого

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3. \quad (30)$$

Положим для определенности $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Тогда

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \quad (31)$$

и

$$\alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3 = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \right]. \quad (32)$$

Поскольку $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_1$, по аксиоме А3 и (31) получаем

$$\mathbf{P}_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \succ \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3. \quad (33)$$

Отсюда с использованием аксиомы А3 и (32) получаем:

$$\alpha_2 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{P}_3 = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} \mathbf{P}_3 \right] \prec \alpha_1 \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_1) \mathbf{P}_3. \quad (34)$$

Это соотношение противоречит (29), (30), так что постоянная α_1 , для которой выполнено (29) – единственна. \diamond

Лемма 4.2 *Если выполнены аксиомы А1–А4, $\mathbf{P}_3 \succeq \mathbf{P}'_2 \succeq \mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ и $\alpha = \alpha(\mathbf{P}_2)$, $\alpha' = \alpha(\mathbf{P}'_2)$ таковы, что*

$$\mathbf{P}_2 \sim \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3, \quad \mathbf{P}'_2 \sim \alpha' \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha') \mathbf{P}_3, \quad (35)$$

то $\alpha \geq \alpha'$ (монотонность операции смешивания)

Доказательство. Пусть, напротив, $\alpha < \alpha'$. Тогда, по аксиомам А3, А4 имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}'_2 \sim \alpha' \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha') \mathbf{P}_3 = \\ & (1 - \alpha + \alpha') \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha'}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_3 \right] + (\alpha' - \alpha) \mathbf{P}_1 \prec \\ & (1 - \alpha + \alpha') \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_1 + \frac{1 - \alpha'}{1 - \alpha + \alpha'} \mathbf{P}_3 \right] + (\alpha' - \alpha) \mathbf{P}_3 = \\ & \alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2, \end{aligned}$$

так что $\mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}'_2$ – противоречие. \diamond

Теорема 4.3 *Если выполнены аксиомы А1–А4, то существует вещественнозначная функция $U : \Theta \rightarrow \mathbf{R}$, называемая функцией полезности, и такая, что для произвольных $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$ соотношение $\mathbf{P}_2 \succeq \mathbf{P}_1$ эквивалентно*

$$\mathbf{E}U(\Xi_1) \geq \mathbf{E}U(\Xi_2), \quad (36)$$

где Ξ_1, Ξ_2 – случайные элементы, задающие распределения $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{P}$, соответственно. Более того, функция U единственна с точностью до положительного аффинного преобразования.

Замечание 4.2 Теорема 4.3 позволяет в качестве средства для сравнения рисков Ξ по предпочтительности использовать их ожидаемую полезность

$$u(\Xi) = \mathbf{E}U(\Xi).$$

Доказательство теоремы 4.3 проведем в предположении конечности множества результатов: $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. При этом каждое распределение $\mathbf{P} \in \mathcal{P}$ можно представить вектором $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_N)$, так что $\mathbf{P}\{\theta_i\} = p_i$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим распределения $\mathbf{P}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{P}_N = (0, 0, \dots, 1)$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\mathbf{P}_N \succeq \dots \succeq \mathbf{P}_1. \quad (37)$$

Если $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim \dots \sim \mathbf{P}_N$, то утверждение теоремы тривиально (см. упражнение 4.8), поэтому сразу считаем $\mathbf{P}_N \succ \mathbf{P}_1$. Пусть A_1, A_N – произвольные постоянные с $A_1 < A_N$, зададим $U(\theta_1) = A_1$, $U(\theta_N) = A_N$. Обозначим α_i , $i = 1, \dots, N$ те (по лемме 4.1 однозначно определенные) постоянные, при которых

$$\mathbf{P}_i \sim \alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (38)$$

Ясно, что $\alpha_1 = 1$, $\alpha_N = 0$. Определим

$$U(\theta_i) = A_i = \alpha_i A_1 + (1 - \alpha_i) A_N, \quad i = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Покажем теперь, что так определенная функция U обладает свойством (36). Для произвольного распределения $\mathbf{P} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{P}$, как нетрудно заметить $\mathbf{P}_N \succeq \mathbf{P} \succeq \mathbf{P}_1$ (см. упражнение 4.9), так что мы можем задать $\alpha(\mathbf{P})$ как (однозначно определенную) постоянную из $[0, 1]$, для которой

$$\mathbf{P} \sim \alpha(\mathbf{P}) \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha(\mathbf{P})) \mathbf{P}_N. \quad (40)$$

Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathbf{P}) \geq \alpha(\mathbf{P}')$. Из (38) имеем:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{P}_i \sim \sum_{i=1}^N p_i [\alpha_i \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha_i) \mathbf{P}_N] \sim \left(\sum_{i=1}^N p_i \alpha_i \right) \mathbf{P}_1 + \left(1 - \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i \right) \mathbf{P}_N. \quad (41)$$

Сравнивая (40) и (41), видим, что

$$\alpha(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i.$$

Таким образом, $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^N p'_i \alpha_i \leq \sum_{i=1}^N p_i \alpha_i. \quad (42)$$

Из (39) вытекает, что $\alpha_i = (A_N - A_i)/(A_N - A_1)$; подставляя это в (42), заключаем, что $\mathbf{P}' \succeq \mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^N p'_i \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} \leq \sum_{i=1}^N p_i \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^N p'_i A_i \geq \sum_{i=1}^N p_i A_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p'_i U(\theta_i) \geq \sum_{i=1}^N p_i U(\theta_i),$$

и (36) доказано.

Осталось показать, что U определено единственным образом с точностью до положительного аффинного преобразования. Пусть U^* – другая функция полезности, удовлетворяющая (36). Обозначим $A_i^* = U^*(\theta_i)$, $i = 1, \dots, N$ из (36) и (39) имеем:

$$U^*(\theta_i) = \alpha_i U^*(\theta_i) + (1 - \alpha_i) U^*(\theta_i),$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{A_N^* - A_i^*}{A_N^* - A_1^*} = \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1},$$

так что

$$A_i^* = A_N^* - (A_N^* - A_1^*) \frac{A_N - A_i}{A_N - A_1} = A_N^* - \frac{(A_N^* - A_1^*) A_N}{A_N - A_1} + \frac{A_N^* - A_1^*}{A_N - A_1} A_i.$$

Таким образом, U^* действительно является положительным аффинным преобразованием от U . \diamond

Упражнение 4.6 Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие $\mathbf{P}_3 \succ \mathbf{P}_2 \sim \mathbf{P}_1$ влечет выполнение (28) при единственном значении $\alpha = 1$.

Упражнение 4.7 Доказать, что в условиях леммы 4.1 условие $\mathbf{P}_3 \sim \mathbf{P}_2 \succ \mathbf{P}_1$ влечет выполнение (28) при единственном значении $\alpha = 0$.

Упражнение 4.8 Доказать, что если в условиях теоремы 4.3 $\mathbf{P}_1 \sim \mathbf{P}_2 \sim \dots \sim \mathbf{P}_N$, то ее утверждение справедливо.

Упражнение 4.9 Доказать, что если в условиях теоремы 4.3 справедливо (37), то для произвольного распределения $P \in \mathcal{P}$ имеет место $P_N \succeq P \succeq P_1$.

4.4 Решения

Введем теперь в рассмотрение активного индивидуума. Пусть \mathcal{A} обозначает множество его действий (решений), и поведение системы в целом описывается функцией $X : \mathcal{A} \times \Omega \mapsto \Theta$, измеримой относительно ω при каждом фиксированном $a \in \mathcal{A}$ (т.е. $\{\omega \in \Omega : X(a, \omega) \in F\} \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}_\Theta$), так что если индивидуум принял решение $a \in \mathcal{A}$, а среда оказалась в (случайном) состоянии $\omega \in \Omega$, то результатом действия a будет $\theta = X(a, \omega) \in \Theta$. Так, например, решением a может служить структура инвестиционного портфеля, состоянием среды ω – доходности ценных бумаг, входящих в портфель, а результатом θ – доходность портфеля в целом.

5 Характеризация отношения к риску

5.1 Отношение к риску

Пусть \mathcal{X} – совокупность всех рисков (для определенности – случайных величин); рассмотрим произвольный риск $X \in \mathcal{X}$ с функцией распределения $F(z) = \mathbf{P}\{X \leq z\}$ и математическим ожиданием $\mu_X = \mathbf{E}X$; в качестве меры полезности риска будем использовать $u(X)$ – среднее значение некоторой функции полезности U на этом риске:

$$u(X) = \mathbf{E}U(X). \quad (43)$$

Исследуем связь формы функции полезности с отношением ее обладателя к риску. Значения X здесь будем трактовать, как доход (чем больше, тем лучше), а функцию полезности U считать возрастающей, так что индивидуум с данной функцией полезности стремится максимизировать значение $u(\cdot)$. В зависимости от соотношения $u(X)$ и μ_X будем различать следующие варианты отношения индивидуума к риску:

- нейтральное отношение: $u(X) = \mu_X, X \in \mathcal{X}$;
- склонность к риску: $u(X) \geq \mu_X, X \in \mathcal{X}$;
- неприятие риска: $u(X) \leq \mu_X, X \in \mathcal{X}$.

Будем обозначать классы функций полезности, описывающих нейтральное отношение, склонность к риску и неприятие риска $\mathcal{U}_N, \mathcal{U}_R, \mathcal{U}_A$, соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_N &= \{U : \mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{U}_R &= \{U : \mathbf{E}U(X) \geq U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}, \\ \mathcal{U}_A &= \{U : \mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), X \in \mathcal{X}\}. \end{aligned}$$

5.1.1 Нейтралитет

Рассмотрим сначала линейную функцию полезности $U(z) = az + b$. В этом случае

$$u(X) = \mathbf{E}U(X) = \mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}X + b = U(\mathbf{E}X) = U(\mu)$$

ввиду линейности математического ожидания. Это означает, что линейная функция полезности описывает нейтральное отношение к риску и любая линейная функция U является элементом \mathcal{U}_N .

5.1.2 Склонность к риску

Пусть теперь функция полезности U выпукла, т.е. удовлетворяет условию

$$U(\alpha y + (1 - \alpha)z) \leq \alpha U(y) + (1 - \alpha)U(z), \quad \alpha \in [0, 1],$$

и, более общо,

$$U\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i U(z_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (44)$$

Тогда, полагая распределение X для простоты дискретным со значениями z_i и соответствующими вероятностями p_i , $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z) dF(z) = \sum_{i=1}^n U(z_i)p_i \geq U\left(\sum_{i=1}^n z_i p_i\right) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \quad (45)$$

т.е. выпуклая функция полезности описывает склонность к риску. Отметим здесь, что вывод формулы (45) справедлив для произвольного, а не только дискретного распределения X .

5.1.3 Неприятие риска

Рассмотрим теперь случай вогнутой функции полезности, удовлетворяющей условию

$$U\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i U(z_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1. \quad (46)$$

Здесь аналогично получаем неравенство

$$\mathbf{E}U(X) = \int U(z) dF(z) = \sum_{i=1}^n U(z_i)p_i \leq U\left(\sum_{i=1}^n z_i p_i\right) = U(\mathbf{E}X) = U(\mu), \quad (47)$$

означающее, что вогнутые функции полезности описывают неприятие риска (risk aversion). Верно и обратное утверждение: неприятие риска описывается вогнутой функцией полезности; сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 5.1 Если для произвольного риска X выполняется неравенство

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X}$$

то функция U является вогнутой, т.е. удовлетворяет условию (46).

Замечание 5.1 Поскольку реальные участники рынков с рисками не принимают риск, т.е. предпочитают детерминированный актив μ_X риску X с $\mathbf{E}X = \mu_X$, всюду в дальнейшем будем рассматривать только строго вогнутые функции полезности. Без существенного ущерба для общности можно считать U достаточно гладкой функцией.

Таким образом, можно дать следующее определение:

Определение 5.1 Функцией полезности называется дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$U(0) = 0, \quad U'(x) > 0, \quad U''(x) < 0, \quad x \geq 0. \quad (48)$$

Упражнение 5.1 Доказать теорему 5.1.

Упражнение 5.2 Доказать аналогичную теорему:

$$\mathbf{E}U(X) \leq U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X} \iff U \in \mathcal{U}_{\mathcal{R}}$$

Упражнение 5.3 Доказать:

$$\mathbf{E}U(X) = U(\mathbf{E}X), \quad X \in \mathcal{X} \iff U \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$$

5.2 Количественное выражение неприятия риска

5.2.1 Цена риска

Пусть X – произвольный риск, w – начальный капитал индивидуума. Очевидно, $w + X$ также является риском. Ясно, что если $\mathbf{D}X > 0$, то $\mathbf{E}U(X) < U(\mathbf{E}X)$ и, следовательно, для произвольного $w \geq 0$ имеем

$$\mathbf{E}U(w + X) < U(w + \mathbf{E}X), \quad (49)$$

так что уравнение

$$\mathbf{E}U(w + X) = U(w + \mathbf{E}X - \pi) \quad (50)$$

имеет единственное решение $\pi > 0$, зависящее от риска X , начального капитала w и функции полезности U .

Определение 5.2 *Решение $\pi = \pi(X) = \pi_{w,U}(X)$ уравнения (50) называется ценой риска X .*

Явное выражение для цены риска имеет вид

$$\pi = w + \mathbf{E}X - U^{-1}[\mathbf{E}U(w + X)], \quad (51)$$

откуда, с учетом (49) очевидна его положительность.

Представляет интерес зависимость цены риска от формы функции полезности. Введем сначала количественное понятие неприятия риска.

5.2.2 Неприятие риска

Определение 5.3 *Неприятием риска (для заданной строго вогнутой функции полезности U) называется отношение*

$$a(z) = -U''(z)/U'(z).$$

Интересующая нас связь описывается теоремой Пратта [7]. Рассмотрим две функции полезности U_1, U_2 и обозначим a_1, a_2 соответствующие величины неприятия риска, π_1, π_2 – цены риска.

5.2.3 Теорема Пратта

Теорема 5.2 *Для двух произвольных функций полезности U_1, U_2 следующие утверждения эквивалентны:*

- а) $a_1(z) > a_2(z)$, $z \geq 0$;
- б) $\pi_1(X) > \pi_2(X)$, $\forall X$;
- в) Существует функция T такая, что $T'(z) > 0$, $T''(z) < 0$, $z \geq 0$ и

$$U_1(z) = T(U_2(z)), \quad z \geq 0.$$

Доказательство проведем по схеме а) \Leftrightarrow в), б) \Leftrightarrow в), следуя изложению в [6].

1. а) \Rightarrow в). Имеем $a_1(z) > a_2(z)$, $z \geq 0$. Зададим функцию T выражением

$$T(v) = U_1(U_2^{-1}(v)) \quad (52)$$

и покажем, что она обладает требуемыми свойствами. Подстановкой $v = U_2(z)$ легко проверяется, что $U_1(z) = T(U_2(z))$, поэтому остается проверить вогнутость T . Проведем проверку прямым вычислением производных и определением их знака. Имеем:

$$T'(v) = U_1'(U_2^{-1}(v))(U_2^{-1})'(v) = \frac{U_1'(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} > 0$$

и

$$\begin{aligned} T''(v) &= \frac{U_2'(U_2^{-1}(v)) U_1''(U_2^{-1}(v)) (U_2^{-1}(v))' - U_1'(U_2^{-1}(v)) U_2''(U_2^{-1}(v)) (U_2^{-1}(v))'}{(U_2'(U_2^{-1}(v)))^2} \\ &= \left\{ \frac{U_2'(U_2^{-1}(v)) U_1''(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} - \frac{U_1'(U_2^{-1}(v)) U_2''(U_2^{-1}(v))}{U_2'(U_2^{-1}(v))} \right\} / \left\{ (U_2'(U_2^{-1}(v)))^2 \right\} \\ &= \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2} \left\{ \frac{U_1''(z)}{U_1'(z)} - \frac{U_2''(z)}{U_2'(z)} \right\} = \frac{U_1'(z)}{(U_2'(z))^2} \{a_2(z) - a_1(z)\}, \end{aligned}$$

что строго меньше 0 по предположению.

2. в) \Rightarrow а). Пусть $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0$, $T'' < 0$. Отсюда $U_1' = T'U_2'$ и $U_1'' = T'U_2'' + T''(U_2')^2$, поэтому

$$a_1 = -\frac{U_1''}{U_1'} = -\frac{T'U_2'' + T''(U_2')^2}{T'U_2'} = a_2 - \frac{T''}{T'}U_2',$$

так что, очевидно, $a_1 > a_2$.

3. в) \Rightarrow б). Пусть снова $U_1 = T(U_2)$ и $T' > 0$, $T'' < 0$. Поскольку

$$\pi_i = w + \mathbf{E}X - U_i^{-1}(\mathbf{E}U_i(w + X)), \quad i = 1, 2,$$

имеем:

$$\pi_1 - \pi_2 = U_2^{-1}(\mathbf{E}U_2(w + X)) - U_1^{-1}(\mathbf{E}U_1(w + X)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)),$$

где $Y = U_2(w + X)$. По неравенству Йенсена имеем $\mathbf{E}T(Y) < T(\mathbf{E}Y)$, а так как функция U_1^{-1} является возрастающей, то и $U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y)) < U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y))$. Таким образом,

$$\pi_1 - \pi_2 > U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) = U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) - U_1^{-1}(U_1(U_2^{-1}(\mathbf{E}Y))) = 0,$$

что и требовалось.

4. б) \Rightarrow в). Зададим снова T формулой (52), из $\pi_1 > \pi_2$ получим с учетом $U_2 = T^{-1}(U_1)$, $U_2^{-1} = U_1^{-1}(T)$: $U_2^{-1}(\mathbf{E}Y) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$, откуда $U_1^{-1}(T(\mathbf{E}Y)) > U_1^{-1}(\mathbf{E}T(Y))$ и, следовательно, ввиду монотонности U_1^{-1} , $T(\mathbf{E}Y) > \mathbf{E}T(Y)$. Выполнение последнего соотношения для произвольной случайной величины Y эквивалентно вогнутости T .

◇

Упражнение 5.4 Для функции полезности $U(z) = 1 - \exp(\alpha z)$ ($\alpha > 0$) выписать меру неприятия риска и явное выражение для цены риска (рисковой премии) π . Какие функции данного класса лежат в \mathcal{U}_A ?

Упражнение 5.5 То же для функции полезности $U(z) = z^\alpha$ ($\alpha > 0$). Какие функции данного класса лежат в \mathcal{U}_A ?

Упражнение 5.6 В теореме 5.2 утверждение в) можно прочитать так: если $U_1 = T(U_2)$ и преобразование T таково, что $T' > 0$, $T'' < 0$, то обладатель функции полезности U_1 менее рискован. Однако, ввиду условия $T' > 0$ функция T взаимно однозначна, следовательно, имеет обратную T^{-1} , так что $U_2 = T^{-1}(U_1)$ и функция U_2 должна бы описывать менее рискованного индивидуума. В чем заключается асимметрия свойств T , не позволяющая сделать такой вывод?

Упражнение 5.7 Теорема 5.2 доказана по схеме, требующей четырех логических цепочек доказательств. Попробуйте найти способ доказательства, использующий минимальное возможное (3) количество цепочек (например, $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$).

Упражнение 5.8 Проверить, является ли цена риска $\pi_{w,U}(X)$ монотонной функцией w при фиксированных X, U . Каков характер монотонности?

6 Простейший процесс риска

6.1 Описание процесса

Рассмотрим простейшую модель процесса риска в терминах следующей игры ([3], гл. XIV): в игре участвуют два игрока, в каждой партии первый игрок выигрывает единицу с вероятностью $p \in (0, 1)$ и проигрывает единицу с вероятностью $q = 1 - p$. Суммарный начальный капитал обоих игроков равен a , начальный капитал первого игрока равен z ; здесь a, z - целые числа, $0 \leq z \leq a$. Таким образом, процесс описывается уравнением

$$X(t) = z + \sum_{i=1}^t Z_i, \tag{53}$$

где Z_1, Z_2, \dots последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с дискретным распределением,

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p, \\ -1, & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases} \tag{54}$$

Игра заканчивается, когда обнуляется капитал одного из игроков (капитал первого игрока становится равным 0 или a), что трактуется, как разорение соответствующего игрока. Ясно, что при $p < 1/2$ игра невыгодна для первого игрока ввиду $\mathbf{E}Z_1 < 0$, при $p > 1/2$ - выгодна ($\mathbf{E}Z_1 > 0$), а при $p = 1/2$ является нейтральной, "справедливой": $\mathbf{E}Z_1 = 0$. Обозначим t_z - момент разорения первого игрока: $t_z = \min\{t : X(t) = 0\}$ (несобственная случайная величина), q_z вероятность разорения первого игрока при начальном капитале z : $q_z = \mathbf{P}\{t_z < \infty\}$. Отметим, что ввиду известной симметрии игры вероятность разорения \tilde{q}_z второго игрока при начальном капитале первого, равном z , может быть вычислена формальной заменой a на $z - a$ и перестановкой p и q в выражении для q_z .

6.2 Уравнение для вероятности разорения

Если начальный капитал первого игрока равен 0 или a , то игра не проводится и соответствующие значения вероятностей разорения равны

$$q_0 = 1, \quad q_a = 0. \quad (55)$$

Если же $0 < z < a$, то после первой партии капитал первого игрока принимает значение $z + 1$ с вероятностью p или значение $z - 1$ с вероятностью q . Поэтому, по формуле полной вероятности,

$$q_z = pq_{z+1} + qq_{z-1}. \quad (56)$$

(56) представляет собой разностное уравнение второго порядка с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{q}{p} = 0, \quad (57)$$

корни которого равны 1 и q/p , соответственно. Обозначим второй корень

$$y = \frac{q}{p}. \quad (58)$$

6.3 Вычисление вероятностей разорения

Если $p \neq 1/2$, то $y \neq 1$, корни различны, и общее решение уравнения (56) имеет вид

$$q_z = C_1 + C_2 y^z. \quad (59)$$

Используя краевые условия (55), находим значения постоянных C_1 , C_2 и соответствующее частное решение:

$$q_z = \frac{y^z - y^a}{1 - y^a}, \quad p \neq \frac{1}{2}. \quad (60)$$

Вычислим вероятность разорения второго игрока упомянутым формальным приемом. Перестановка p и q означает замену y на y^{-1} , так что

$$\tilde{q}_z = \frac{y^{-(a-z)} - y^{-a}}{1 - y^{-a}} = \frac{y^z - 1}{y^a - 1} = \frac{1 - y^z}{1 - y^a}.$$

Нетрудно заметить, что $q_z + \tilde{q}_z = 1$, так что в игре без ограничения времени с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

При $p = 1/2$ имеем $y = 1$, так что корни характеристического уравнения вещественны и совпадают. Второе линейно независимое решение уравнения (56) имеет в этом случае вид z , общее решение - $q_z = C_1 + C_2 z$, частное решение -

$$q_z = 1 - \frac{z}{a}, \quad p = \frac{1}{2}. \quad (61)$$

К тому же результату можно прийти, раскрывая неопределенность в (60) при $y \rightarrow 1$ по правилу Лопиталья. Вероятность разорения второго игрока имеет вид

$$\tilde{q}_z = 1 - \frac{a - z}{a} = \frac{z}{a},$$

так что снова с вероятностью 1 происходит разорение одного из игроков.

Функция q_z в (60) и (61) монотонно убывает от 1 до 0 при изменении z от 0 до a . Если $p > 1/2$, то $y < 1$, и (60) является выпуклой; если же $p < 1/2$, то $y > 1$, и (60) является вогнутой.

6.4 Игра с бесконечно богатым противником

Изучим поведение вероятности разорения при $a \rightarrow \infty$; для случая $p \leq 1/2$ при произвольном фиксированном z имеем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q_z = 1,$$

что означает бесперспективность игры с бесконечно богатым противником в случае невыгодности ($p < 1/2$) или нейтральности ($p = 1/2$) игры. При $p > 1/2$ получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} q_z = y^z = e^{-\alpha z},$$

т.е. зависимость вероятности разорения от начального капитала является экспоненциальной с показателем $\alpha = -\ln y = -\ln(q/p) > 0$. Отметим, что условие положительности рискованной надбавки $\mathbf{E}Z_1 > 0$ эквивалентно $p > 1/2$.

7 Классический процесс риска

Классический процесс риска изучался на протяжении всего 20 века, начиная с работы Лундберга [4]. Уравнением этого процесса описывается динамический портфель страховой компании, банка, других финансовых организаций, являющихся перераспределителями финансовых потоков в окружении рискованной среды. Среди других приложений можно упомянуть описание уровня воды в водохранилище.

7.1 Определение

Рассмотрим определение процесса риска на примере работы страховой компании. Пусть страховые премии поступают равномерным потоком¹ с интенсивностью \tilde{c} , а в случайные моменты времени $0 < T_1 < T_2 < \dots$ наступают страховые события, наносящие ущерб случайного размера $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots$, соответственно. Тогда размер капитала компании в момент времени t при условии, что начальный капитал (в момент времени $T_0 = 0$) равен x , описывается выражением

$$\tilde{X}(t) = x + \tilde{c}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{Z}_i, \quad (62)$$

где

$$N(t) = \max\{k : T_k \leq t\} - \quad (63)$$

количество страховых событий, наступивших в интервале времени $[0, t]$. Поскольку моменты времени T_i , $i = 1, 2, \dots$ случайны, случайными оказываются и промежутки времени между последовательными страховыми событиями

$$\theta_i = T_{i+1} - T_i \geq 0. \quad (64)$$

¹От требования равномерности потока можно избавиться введением так называемого **операционного времени**; этот прием будет рассмотрен позже.

Случайный процесс вида (62) называется **классическим процессом риска**, если случайные величины θ_i , $i = 1, 2, \dots$ являются независимыми, одинаково распределенными и имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$F_\theta(v) = \mathbf{P}\{\theta_1 \leq v\} = 1 - \exp(-\lambda v), \quad v \geq 0, \quad (65)$$

случайные величины \tilde{Z}_i , $i = 1, 2, \dots$ также являются независимыми и одинаково распределенными и имеют функцию распределения

$$\tilde{F}_{\tilde{Z}}(v) = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_1 \leq v\}, \quad v \geq 0; \quad \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0. \quad (66)$$

При этом, как известно [3], количество страховых событий $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt :

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (67)$$

а накопленный размер страховых убытков

$$\tilde{Z}_{[0,t]} = \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{Z}_i$$

на интервале времени $[0, t]$ является случайной величиной с так называемым составным распределением Пуассона, функция распределения которого имеет вид

$$\mathbf{P}\{\tilde{Z}_{[0,t]} \leq v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tilde{F}_{\tilde{Z}}^{*k}(v), \quad v \geq 0, \quad (68)$$

где F^{*k} означает k – кратную свертку функции распределения F с собой, т.е. функцию распределения суммы k независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F .

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость значения процесса $\tilde{X}(t)$ от случайного аргумента $\omega \in \Omega$, будем использовать обозначение $\tilde{X}(\omega, t)$, в частности, отдельную траекторию процесса при фиксированном ω будем обозначать

$$\tilde{X}_\omega = \{\tilde{X}(\omega, t), \quad t \geq 0\}. \quad (69)$$

Как видим, классический процесс риска вполне определяется значениями четырех параметров $(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}})$, удовлетворяющих условиям

$$x \geq 0, \quad \tilde{c} > 0, \quad \lambda > 0, \quad \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0. \quad (70)$$

Произвольный классический процесс риска с фиксированными значениями параметров, удовлетворяющих условиям (70), будем обозначать

$$\tilde{X} = \tilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}}), \quad (71)$$

а совокупность всех классических процессов риска с такими параметрами –

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{X}(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) : x \geq 0, \tilde{c} > 0, \lambda > 0, \tilde{F}_{\tilde{Z}}(0) = 0\}. \quad (72)$$

7.2 Разорение процесса

Под разорением процесса (62) понимается достижение уровня 0, то есть событие

$$\widetilde{\mathcal{R}}(x) = \widetilde{\mathcal{R}}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \{\omega \in \Omega : \exists t \geq 0, \widetilde{X}(\omega, t) \leq 0\}, \quad (73)$$

при этом **моментом разорения** называется случайная величина

$$\tilde{\tau}(x) = \tilde{\tau}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \min\{t : \widetilde{X}(t) \leq 0\}. \quad (74)$$

Эта случайная величина зависит от параметров процесса (62) и может оказаться несобственной, с положительной вероятностью принимая значение ∞ ; такая ситуация соответствует траекториям, которые не разоряются на всей временной полуоси $[0, \infty)$.

Вероятностью разорения процесса (62) называется величина

$$\mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\} = \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{R}}(x)),$$

т.е. вероятностная мера множества тех траекторий, которые разоряются за конечное время. Эта величина также является, очевидно, функцией параметров процесса, что будем подчеркивать обозначением

$$\tilde{R}(x) = \tilde{R}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = \mathbf{P}\{\tilde{\tau}(x) < \infty\}. \quad (75)$$

В некоторых случаях более удобной характеристикой процесса риска оказывается вероятность выживания процесса

$$\tilde{S}(x) = \tilde{S}(x, \lambda, \tilde{c}, \tilde{F}_{\tilde{Z}}) = 1 - \tilde{R}(s). \quad (76)$$

7.3 Зависимость вероятности разорения процесса от параметров

Отметим следующие свойства монотонности вероятности разорения, как функции параметров процесса.

- \tilde{R} является невозрастающей функцией x ;
- \tilde{R} является невозрастающей функцией \tilde{c} ;
- \tilde{R} является неубывающей функцией λ ;
- \tilde{R} является невозрастающей функцией $\tilde{F}_{\tilde{Z}}$, если порядок на множестве функций распределения задан отношением $F_1 \preceq F_2 \iff F_1(x) \leq F_2(x) \forall x$.

Проверка перечисленных свойств производится путем сравнения событий разорения (73) при соответствующих значениях параметров.

8 Агрегированный процесс риска

В данном разделе рассматривается процесс риска в дискретном времени, который оказывается тесно связанным с классическим процессом риска посредством операции агрегирования.

8.1 Операция агрегирования

Рассмотрим классический процесс риска (62), зафиксируем число $\delta > 0$ и разобьем положительную полуось \mathbf{R}^+ на интервалы $\Delta_i = [(i-1)\delta, i\delta)$ длины δ . Далее, сгруппируем все премиальные поступления и страховые убытки, произошедшие в этих интервалах времени. Тогда размер премиальных поступлений за любой период Δ_i равен, очевидно,

$$c = \tilde{c}\delta. \quad (77)$$

Размер Z_i накопленных страховых убытков на интервале Δ_i вычисляется следующим образом. Для каждого i размер Z_i является случайной величиной, причем для $i = 1$ ее распределение уже вычислено в (68), следует лишь подставить значение длины интервала времени $t = \delta$:

$$F_Z(v) = \mathbf{P}\{Z_1 \leq v\} = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_{[0,\delta)} \leq v\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\delta} \frac{(\lambda\delta)^k}{k!} \tilde{F}_Z^{*k}(v), \quad v \geq 0. \quad (78)$$

Далее, ввиду стационарности потока страховых событий и независимости и одинаковой распределенности убытков классического процесса риска $\{\tilde{Z}_k, k = 1, 2, \dots\}$ размеры убытков $\{Z_i, i = 1, 2, \dots\}$ на интервалах Δ_i также являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения (78).

Таким образом, значение классического процесса риска (62) в момент времени $n\delta$ при целых n равно

$$X(n) = x + cn - \sum_{i=1}^n Z_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (79)$$

Процесс (79) называется **агрегированным процессом риска** и является аппроксимирующей моделью для классического процесса риска при $\delta \rightarrow 0$.

Ясно, что процесс (79) зависит от трех параметров (x, c, F_Z) вычисляемых по параметрам исходного классического процесса $(x, \tilde{c}, \lambda, \tilde{F}_Z)$ и значению параметра агрегирования δ по формулам (77), (78). Будем обозначать

$$X = X(x, c, F_Z) \quad (80)$$

агрегированный процесс риска, определяемый параметрами x, c, F_Z , а \mathcal{X} – совокупность всех агрегированных процессов риска при всевозможных допустимых значениях параметров:

$$\mathcal{X} = \{X(x, c, F_Z); x \geq 0, c > 0, F_Z(0) = 0\}. \quad (81)$$

8.2 Разорение

Обозначим

$$\mathcal{R}(x, c, F_Z) = \mathcal{R}(x) = \{\omega : \exists n > 0, X_\omega(n) \leq 0\} \quad (82)$$

событие разорения агрегированного процесса,

$$\tau(x) = \tau(x, c, F_Z) = \min\{n : X(n) \leq 0\} - \quad (83)$$

момент разорения и

$$R(x) = R(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau < \infty\}, \quad (84)$$

$$S(x) = S(x, c, F_Z) = \mathbf{P}\{\tau = \infty\} = 1 - R(x) \quad - \quad (85)$$

вероятность разорения и выживания процесса, соответственно. Рассматривая отношение включения событий разорения (выживания) при различных значениях параметров процесса риска, нетрудно заключить, что вероятность выживания является неубывающей функцией начального капитала x , интенсивности премиального потока c и функции распределения убытков F_Z , если на множестве функций распределения рассмотреть естественный частичный порядок

$$F_1 \preceq F_2 \iff F_1(v) \leq F_2(v), v \geq 0.$$

8.3 Случайное блуждание

Агрегированный процесс риска заменой переменных $Y_i = c - Z_i$, $i = 1, 2, \dots$ можно представить в виде случайного блуждания [3]

$$X(n) = x + \sum_{i=1}^n Y_i \quad (86)$$

с независимыми одинаково распределенными "шагами" Y_i , $i = 1, 2, \dots$. Отсюда, используя теорему п. 2.XII.2 из [3], выводим

Теорема 8.1 *Агрегированный процесс риска (79) может принадлежать к одному и только к одному из трех типов в зависимости от соотношения между его параметрами:*

1. $c = \mathbf{E}Z_1$: осциллирующий тип; процессы этого типа с вероятностью единица достигают любого наперед заданного уровня; точнее:

$$\mathbf{P}\{\inf_{n \in \mathbf{N}} X(n) = -\infty\} = 1 \quad (87)$$

и

$$\mathbf{P}\{\sup_{n \in \mathbf{N}} X(n) = \infty\} = 1. \quad (88)$$

2. $c < \mathbf{E}Z_1$: разоряющийся тип; для процессов этого типа выполняется (87) и с вероятностью 1 существует конечный максимум

$$\mathbf{M}(x) = \max_{n \in \mathbf{N}} X(n). \quad (89)$$

3. $c > \mathbf{E}Z_1$: *выживающий тип*; для процессов этого типа выполняется (88) и с вероятностью 1 существует конечный минимум

$$\mathbf{m}(x) = \min_{n \in \mathbf{N}} X(n). \quad (90)$$

Из приведенной теоремы ясно, что процессы первого типа ввиду (87) разоряются с вероятностью 1. Поскольку для процессов второго типа (87) также имеет место, они тоже являются разоряющимися с вероятностью 1. Для процессов третьего типа вероятность выживания есть

$$S(x) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) > 0\} \quad (91)$$

и может быть, вообще говоря, положительной. Более того, поскольку для произвольных $x, y \geq 0$ имеет место $\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}(y) + (x - y)$, для G_x – функции распределения $\mathbf{m}(x)$ – получаем

$$G_x(v) = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(x) \leq v\} = \mathbf{P}\{\mathbf{m}(y) - y \leq v - x\} = G_y(v + y - x) \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow \infty$ и фиксированных v, y , поэтому справедлива

Теорема 8.2 Пусть выполнено

$$c > \mathbf{E}Z_1. \quad (92)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 1. \quad (93)$$

Замечание 8.1 Условие (92) обычно называется условием положительности рисковой надбавки $c - \mathbf{E}Z_1$.

8.4 Уравнение для вероятности разорения

Используя формулу полной вероятности, нетрудно вывести интегральное уравнение для вероятности выживания процесса (79), как функции начального капитала. Зафиксируем параметры c, F_Z , и определим событие "выживание при условии, что начальный капитал равен x ":

$$\mathcal{S}(x) = \{\omega \in \Omega : X(n) > 0, n = 0, 1, \dots; X(0) = x\}, \quad (94)$$

а для интервала I – аналогичное событие "выживание при условии, что начальный капитал принадлежал интервалу I ":

$$\mathcal{S}(I) = \{\omega \in \Omega : X(n) > 0, n = 0, 1, \dots; X(0) \in I\}. \quad (95)$$

Ясно, что $\mathcal{S}(x) \subseteq \mathcal{S}_1 = \{Z_1 < x + c\}$. Для произвольного целого $m > 0$ разобьем отрезок $[0, x + c)$ на m равных частей I_k длины $\gamma = (x + c)/m$: $I_k = [(k - 1)\gamma, k\gamma)$, $k = 1, \dots, m$. Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mathcal{S}(x)\} = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}(x + c - I_k) \mathbf{P}\{Z_1 \in I_k\} = \sum_{k=1}^m \mathcal{S}(x + c - I_k) (F_Z(k\gamma) - F_Z((k - 1)\gamma)).$$

Правая часть последнего выражения представляет собой, очевидно, интегральную сумму для интеграла

$$\int_0^{x+c} S(x+c-v) dF_Z(v),$$

и сходится к нему при $m \rightarrow \infty$, а левая часть не зависит от m и равна $S(x)$, так что

$$S(x) = \int_0^{x+c} S(x+c-v) dF_Z(v). \quad (96)$$

Это интегральное уравнение позволяет изучать многие свойства агрегированного процесса риска, выраженные в терминах вероятностей выживания или разорения.

8.5 Пример: простейший процесс риска

Положим $c = 1$, $p \in (0, 1)$ и

$$F_Z(v) = \begin{cases} 0, & v < 0, \\ p, & 0 \leq v < 2, \\ 1, & v \geq 2. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что при этом агрегированный процесс риска (79) превращается в простейший процесс риска (53), а уравнение для вероятности выживания приобретает вид

$$S(x) = S(x+1) + (1-p)S(x-1),$$

что согласуется с (56).

9 Время жизни процессов риска

В параграфах 6–8 получены уравнения для вероятности разорения. Представляет интерес также и момент разорения. В настоящем параграфе изучим среднее время жизни процессов риска.

9.1 Простейший процесс риска

Рассмотрим простейший процесс риска (53):

$$X_n = z + \sum_{i=1}^n Z_i, \quad (97)$$

где Z_i , $i = 1, 2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значение 1 с вероятностью p и значение -1 с вероятностью $q = 1 - p$, и обозначим τ_z момент окончания игры (разорения одного из игроков) при условии, что первый игрок имел начальный капитал z , а второй: $a - z$:

$$\tau_z = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ или } X_n = a\}. \quad (98)$$

Как мы помним, на бесконечном горизонте времени разорение одного из игроков наступает с вероятностью 1, так что τ_z является собственной случайной величиной.

Обозначим $m(z) = \mathbf{E}\tau_z$ ее среднее значение, и поставим задачу вычисления этой величины. Из формулы полной вероятности для математических ожиданий нетрудно получить уравнение для $m(z)$ вида $m(z) = 1 + pm(z+1) + qm(z-1)$, откуда

$$m(z+1) - \frac{1}{p}m(z) + \frac{q}{p}m(z-1) = -\frac{1}{p}. \quad (99)$$

Характеристическое уравнение для (99) имеет корни $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = q/p = y$. Рассмотрим сначала случай некрatных корней $y \neq 1$ ($p \neq 1/2$). Тогда частное решение неоднородного уравнения (99) имеет вид $m_0(z) = \frac{z}{p(y-1)}$, так что его общее решение запишется в форме

$$m(z) = C_1 + C_2y^z + \frac{z}{p(y-1)}. \quad (100)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 можно определить из краевых условий $m(0) = m(a) = 0$, которые дают

$$-C_2 = C_1 = \frac{a}{p(1-y)(1-y^a)},$$

так что решение уравнения (99) есть

$$m(z) = \frac{1}{p(1-y)} \left(a \frac{1-y^z}{1-y^a} - z \right). \quad (101)$$

В случае кратных корней $y = 1$ ($p = 1/2$) общее решение уравнения (99) имеет вид $C_1 + C_2z + m_0(z)$, где частное решение $m_0(z)$ легко находится в классе квадратичных функций и равно $m_0(z) = -z^2$, так что искомое решение после определения постоянных из краевых условий записывается в форме

$$m(z) = z(a-z). \quad (102)$$

Интересно отметить, что решение (102) может быть получено предельным переходом из (101) с помощью двукратного применения правила Лопиталья.

Рассмотрим, наконец, игру с бесконечно богатым противником ($a \rightarrow \infty$). При $y < 1$ из (101), видно, что среднее время жизни неограниченно увеличивается. Этот эффект связан с тем, что при $y < 1$ имеем $p > 1/2$, и даже в игре с бесконечно богатым противником первый игрок разоряется с вероятностью, меньшей 1, то есть с положительной вероятностью время жизни процесса бесконечно.

При $y = 1$ из (102) также вытекает $m(z) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что хотя в этом случае ($p = 1/2$) первый игрок и разоряется с вероятностью 1 в игре с бесконечно богатым противником, однако среднее время ожидания разорения бесконечно велико.

При $y > 1$ ($p < 1/2$) из (101) следует, что ожидаемое время до разорения в игре с бесконечно богатым противником есть

$$m(z) = \frac{z}{p(y-1)},$$

и линейно возрастает вместе с z .

9.2 Игра в кошки – мышки

Рассмотрим еще одну задачу на вычисление ожидаемой продолжительности процесса. Пусть в двух комнатах обитают кот и мышь, и перемещаются из комнаты в комнату независимо друг от друга в соответствии с матрицами переходных вероятностей

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

где элемент c_{ij} матрицы C есть вероятность перемещения кота из комнаты i в комнату j ; $i, j = 1, 2$, а элементы матрицы M описывают аналогичные вероятности для мыши. Если в какой-либо из моментов времени кот и мышь оказываются в одной комнате, то кот съедает мышь. Определить среднее время жизни мыши при различных начальных расположениях.

Опишем задачу в виде марковской цепи с четырьмя состояниями $E = (i, j)$; $i, j = 1, 2$: кот находится в комнате i , а мышь – в комнате j , и обозначим t_{ij} среднее время оставшейся жизни мыши в состоянии (i, j) . Обозначим E_n состояние цепи в момент времени n , тогда, очевидно, $t_{11} = t_{22} = 0$, а для t_{12}, t_{21} по формуле полной вероятности запишем уравнения

$$t_{12} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1, 2)|E_0 = (1, 2)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2, 1)|E_0 = (1, 2)\},$$

$$t_{21} = 1 + t_{12}\mathbf{P}\{E_1 = (1, 2)|E_0 = (2, 1)\} + t_{21}\mathbf{P}\{E_1 = (2, 1)|E_0 = (2, 1)\}.$$

Вычисляя переходные вероятности с учетом условия независимости, получаем систему уравнений

$$0.94t_{12} - 0.56t_{21} = 1,$$

$$-0.48t_{12} + 0.92t_{21} = 1,$$

которая имеет решение $t_{12} = 2.483$, $t_{21} = 2.383$.

Список литературы

- [1] Методика расчета тарифных ставок по рисковым видам страхования. Финансовая газета, 1993, № 40, с. 2-3.
- [2] ФОН НЕЙМАН Дж., МОРГЕНШТЕРН О. (1970) *Теория игр и экономическое поведение*. М.: Наука.
- [3] В.ФЕЛЛЕР. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. **1,2**, М.: Мир, 1984.
- [4] LUNDBERG F.I. (1903) *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen, II. Aterförsäkring av Kollektivrisker.*—Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- [5] RICHARD D. MACMINN (1989) *The expected Utility Theorem*. Lecture note, 11p., http://kiwiclub.bus.utexas.edu/uncertainty/expected_utility/eu.pdf

- [6] RICHARD D. MACMINN (1996) *Notes on Pratt's 'Risk Aversion in the Small and in the Large'*. Lecture note, 6p., http://kiwiclub.bus.utexas.edu/uncertainty/expected_utility/pratt.pdf
- [7] PRATT J.W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, **32**, pp. 122–136.